美しい Van Aubel の定理

西山豊

〒533-8533 大阪市東淀川区大隅 2-2-8 大阪経済大学 経営情報学部

Tel: 06-6328-2431 E-Mail: nishiyama@osaka-ue.ac.jp

「数学を楽しむ／美しい定理」『理系への数学』2009 年 11 月 Vol. 42, No. 11, 4-7 に掲載

1．ある幾何の問題から

定期的に郵送されてくる数学のある会報につぎのような問題があった．任意の四角形 $ABCD$ がある．各辺を 1 辺とする正方形を四角形の外側に描く．その正方形の中心を P, Q, R, S としたとき，その中心を結んでできた線分 PR と QS は長さが等しく，互いに直交していることを証明せよというのだ(図 1)．私は，この問題を見たとき，美しい定理だと思った．何を持って美しいとするかは議論の分かれるところであるが，数学愛好家にとっては，無条件に美しいと思うのではないだろうか．

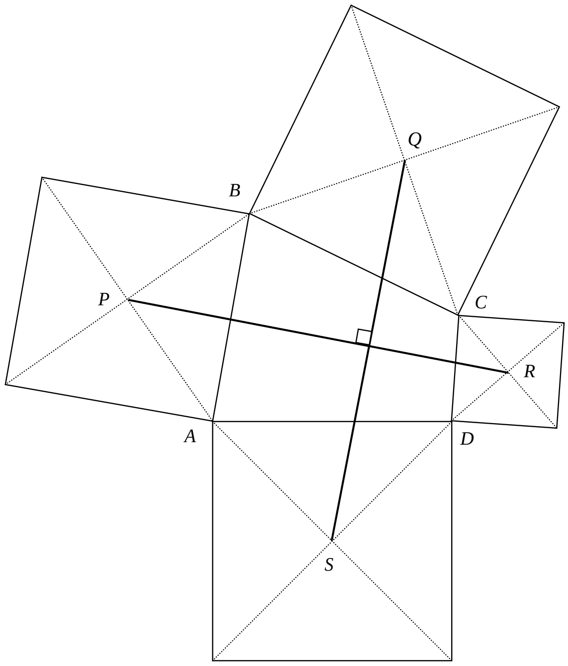

図 1

私が，この問題をみて美しいと感じたのは，どんな四角形でも線分の長さが等しく，直交するという結果だけではなく，その証明方法が実に鮮やかであったからだ．以下，それを紹介しよう[1]．

2．複素数を用いた証明

四角形 $ABCD$ に対して，頂点 A を原点 O とする．ベクトル AB を複素数 $2a$ に，ベクトル BC を複素数 $2b$ に，ベクトル CD を複素数 $2c$ に，ベクトル DA を複素数 $2d$ に対応させる．ここで複素数の係数 2 は計算上の便宜的なものである．また，正方形の中心については，ベクトル AP を複素数 p に，ベクトル AQ を複素数 q に，ベクトル AR を複素数 r に，ベクトル AS を複素数 s に対応させる．

四角形 $ABCD$ は閉じているから，ベクトルを計算すると $2a+2b+2c+2d=0$，つまり，

$a+b+c+d=0$

となる．この条件で証明することになる．

点 P は点 A から点 B に向かって半分進み，90 度方向を変えて半分だけ進むから，複素数 p は，

$p = a + ia = (1+i)a$

となる．ここに，i は虚数単位で，$i^2 = -1$ である．複素数は極形式 (r, θ) でも表現され，

$$i = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = e^{\frac{\pi}{2}i}$$

であるから，a に i をかけるということは半径 $r = 1$，偏角 $\theta = \pi/2$ の複素数をかけるということであり，拡大縮小をともなわない回転移動ということになる．

同様にして，複素数 q, r, s は次のようになる．

$$q = 2a + (1+i)b$$
$$r = 2a + 2b + (1+i)c$$
$$s = 2a + 2b + 2c + (1+i)d$$

点 Q から点 S に向かうベクトルを A，点 P から点 R に向かうベクトルを B とすると，A は $s-q$，B は $r-p$ であるから，

$$A = s - q = (b + 2c + d) + i(d - b)$$
$$B = r - p = (a + 2b + c) + i(c - a)$$

となる．

証明すべきは，線分 QS と線分 PR の長さが等しく，互いに直交していることであるから，複素数 A と B の関係が，

$B = iA$

を満たすことである．または，この式の両辺に i をかけて整理すると，

$A + iB = 0$

となり，この式で証明してもよい．実際に計算すると，

$$A + iB$$
$$= (b + 2c + d - c + a) + i(d - b + a + 2b + c)$$
$$= (a + b + c + d) + i(a + b + c + d) = 0$$

となる．

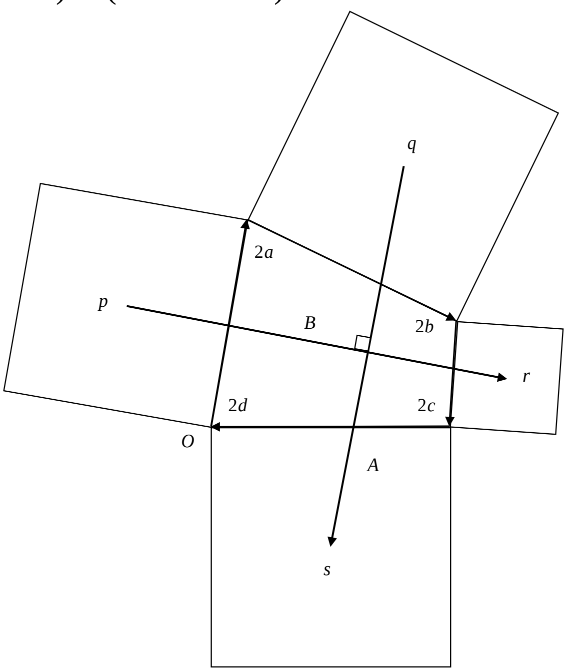

図２

実に鮮やかな証明である．でも何か物足りなかった．それは，複素数でしか証明できないものだろうかという疑問である. これは後述するとして, 文献[1]には, 図１を証明するための前段階として図３が示されていた.

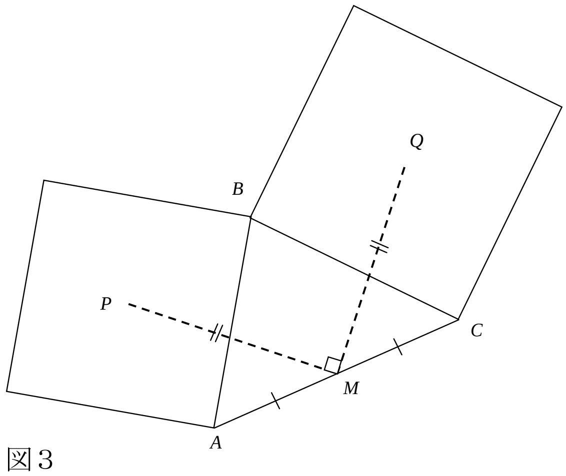

図３

図１の四角形$ABCD$ において，辺ABと辺BCを残した三角形ABCを考える．辺ABと辺BCの外側に正方形を作図し，正方形の中心をP, Qとする．残りの辺CAの中点をM として，M からP とQに線を引くと，線分PM と線分QM の間には,

$$PM = QM, \quad PM \perp QM$$

の関係がある．これを証明するために図２と同じように複素数を用いることもできるが，ここでは幾何学的な意味を考えてみよう．

複素関数を用いて平行移動や回転を調べることができる．点p を中心に$\pi/2$ 回転したものを$R_p^{\pi/2}$，点q を中心に$\pi/2$ 回転したものを$R_q^{\pi/2}$, 点m を中心にπ 回転したものをR_m^{π} とし，３つの回転による合成関数をM とすれば,

$$M = R_m^{\pi} \circ R_q^{\pi/2} \circ R_p^{\pi/2}$$

となる．ここで，$\pi/2 + \pi/2 + \pi = 2\pi$ より，回転角の合計が2π の整数倍になるので，M はある点v に対して平行移動したT_v に等しくなる.

平行移動について調べるため，ある点k に注目してみると，$M(k) = k$ であるので，M は０の平行移動, つまり恒等変換である．したがって,

$$R_q^{\pi/2} \circ R_p^{\pi/2} = (R_m^{\pi})^{-1} \circ M = R_m^{\pi}$$

である．$p' = R_m^{\pi}(p)$ と定めればm はpp' の中点になる．一方,

$$p' = (R_q^{\pi/2} \circ R_p^{\pi/2})(p) = R_q^{\pi/2}(p)$$

より，p' はp を，点q を中心に$\pi/2$ 回転したものである．したがってpqp' は直角二等辺三角形となり，pm とqm は直交し同じ長さをもつ(図４).

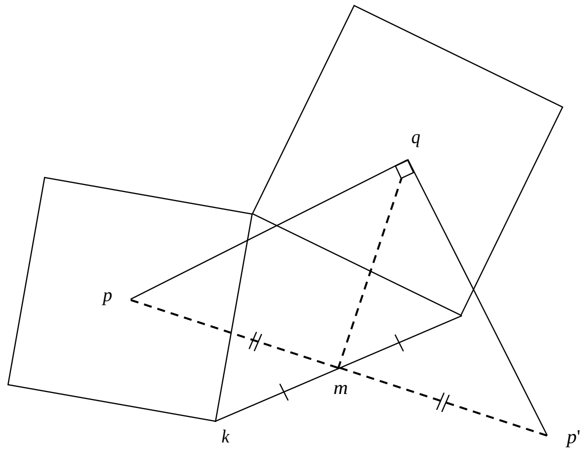

図４

３．初等幾何による証明

証明はこれでよいのだが，複素数を用いなくても証明ができないかと考えた．まず図３の証明を考えてみよう(図５)．

辺ACの中点をM_1，辺ABの中点をM_2，辺BCの中点をM_3とする．$M_2P = M_2B$かつ$M_2P \perp M_2B$であり，$M_3Q = M_3B$かつ$M_3Q \perp M_3B$である．そこでM_2BをM_1M_3へ，M_3BをM_1M_2へ平行移動すればΔPM_1M_2とΔQM_1M_3は２辺がそれぞれ等しく，夾角が 90 度＋$\angle B$で等しくなるから合同となる．そして，

$$PM_2 \perp M_1M_3,\ M_1M_2 \perp QM_3$$

であるから，残りの辺PM_1とQM_1は長さが等しく垂直となる[2]．複素関数でいえば，点M_2を中心にΔPM_1M_2を$\pi/2$回転させ，M_2からM_3の方向に平行移動するとΔQM_1M_3になる．

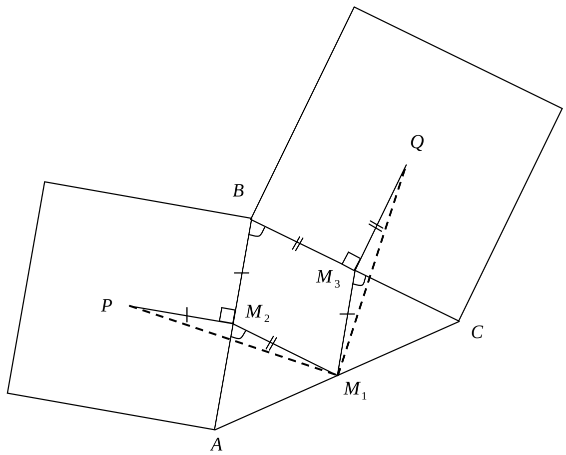

図５

図３による結果を２度使うと，図１が証明できる．
任意の四角形$ABCD$において対角線ACを引き，その中点をMとする．正方形Pと正方形Qに関しては，

$$PM = QM,\quad PM \perp QM$$

が成り立ち，正方形R と正方形S に関しては,

$RM = SM$,　$RM \perp SM$

が成り立つ.

ここでΔPMR とΔQMS について考えてみよう.

対応する２辺は，$PM = QM$, $RM = SM$ で等しく，夾角はともに$\angle QMR$ に直角を加えたものであるので等しいので,

$\Delta PMR \equiv \Delta QMS$

である．また，これらは点M を中心に90度回転しているから

$PR = QS$,　$PR \perp QS$

となる．PR とQS の交点はF となり，一般的に点M とは異なる.

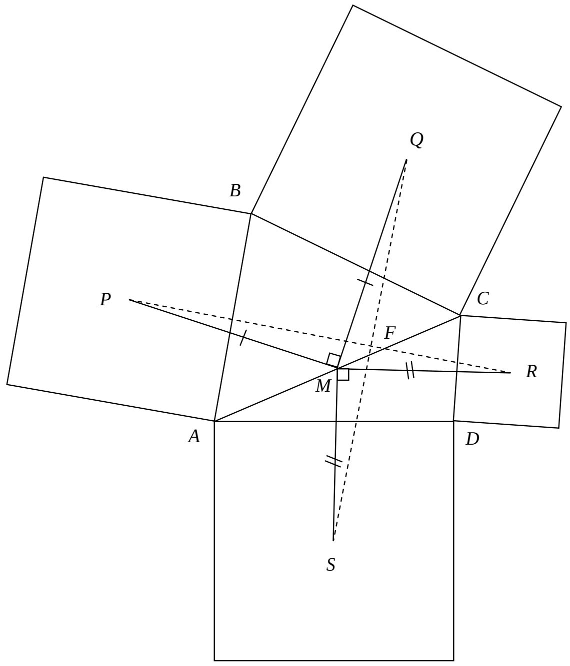

図６

さて，PR とQS は長さが等しく，直交しているが，その交点F はそれぞれの線分をどのような比率で内分しているのであろうか．それを知るには，正方形の中心の間を結んでPQ, QR, RS, SP とすると，ΔFQP, ΔFRQ, ΔFSR, ΔFPS は直角三角形となる．PQ, QR, RS, SP を直径とする外接円を描くと，これらは点F で交わる．隣り合う外接円によってできる共通の弦PF, QF, RF, SF の長さがPR とQS の内分比を決めている（図７）．四角形$ABCD$ が正方形，ひし形，長方形，平行四辺形の場合は四角形$PQRS$ が正方形になり，PR とQS は互いに他を２等分している.

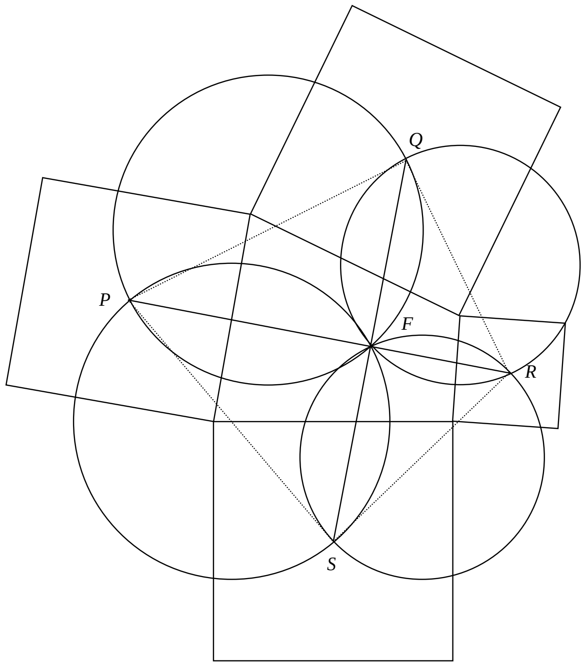

図７

4．Van Aubel の定理

私が今回の問題を知って全体を把握するのに約２週間かかった．最初のうちは，こんなことが可能なのだろうかと，さまざまな四角形 $ABCD$ を作図して試してみた．正方形，ひし形，長方形，平行四辺形などの場合は自明で２つの線分は長さが等しく直交していた．等脚台形の場合は，直交性は自明だが長さが等しい証明は難しかった．一般の台形になるとまったくのお手上げだった．

そこで，四角形 $ABCD$ の頂点の座標を入力して線分がどうなるかを調べた．直線の方程式から交点の座標を求めようとしたが式の展開が複雑になってきた．それに，この試みは定理の結果を使って，その確認作業をしているだけで証明にはなっていないことに気がついてやめることにした．

それでも，任意の四角形 $ABCD$ から線分 PR と QS を作図できるソフトがあれば便利だろうなと思っていた．インターネットで調べていたところ，私がイメージしていたそのものズバリが見つかった．アプレット（Java Applet）とよばれる小さなプログラムで作成されたもので，販売までされているのを知り，時代の変化を感じた．四角形 $ABCD$ の各頂点をドラッグすると，それぞれに対応する正方形が変化し，線分 PR と QS が変化していく．いかに頂点を動かそうとも２つの線分は直交しなおかつ長さが等しいことが確認できる．

私がこの幾何学の問題を見て新鮮に映ったのは，日本ではあまり紹介されていなかったからだ．そこでこの問題のルーツ探しをしてみた．1971 年出版の『幾何学大辞典　第 1 巻』の p296 には 387 番目の問題として紹介されていて，初等幾何学による証明と複素数による証明の２つが掲載されている．386 番目が Morley の定理（三角形の頂角の 3 等分線の辺に近い２つずつの交点は正三角形を作る）であり，「有名な定理」として分類されているが，名前もついていずそれほど知られていないのが不思議である．

一方，欧米ではこの問題を示す Web サイトをよく見かける．関連して図８のような例がある．正方形 $ABCO$ と正方形 $PORQ$ が点 O でつながっていて，正方形の頂点間に線分 AP と線分 CR を引き，それらの中点を K, L として，正方形の中心 M, N と中点 K, L を結んで四角形 $MKNL$ を作ると，これは正方形になる．証明は図 3 または図 5 を 2 回，適用すればできる．

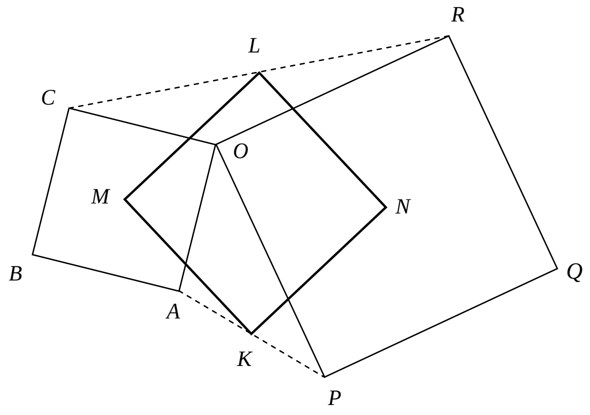

図８

また任意の三角形ABCの外側に，各辺を１辺とする正三角形を描き，それらの重心を結ぶと正三角形になる．これはナポレオンの定理として紹介されている．

実に美しい定理である．これらの定理のルーツを調べてみると，1878年のVan Aubelの文献にまで遡ることができた[3]．日本ではあまり知られていない数学者であるが，この美しい定理はVan Aubelの定理としておこう．

高校数学の教科書の中から平面幾何が削除されて久しくなった.削除の理由のひとつに大学入試改革がある.それまで記述式であった入学試験の問題がマークシート方式にかわって，幾何学の問題が出題できにくくなったのだ．少子高齢化で学生の数が減少してきているので，入学試験を記述式に戻し，幾何学を大胆に復活させてみてはどうだろうか.

参考文献

[1] T.ニーダム，石田久ら訳『ヴィジュアル複素解析』培風館，2002年

[2]岩田至康編『幾何学大辞典　第１巻』槙書店，1971年，123ページと296ページ

[3] M. H. Van Aubel, Note concernant les centres des carrés construits sur les côtés d'un polygon quelconque, Nouv. Corresp. Math., 4(1878), 40-44

(にしやまゆたか／大阪経済大学)